

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Semestrální práce z předmětu
Matematické modelování KMA/MM

Matematické kyvadlo

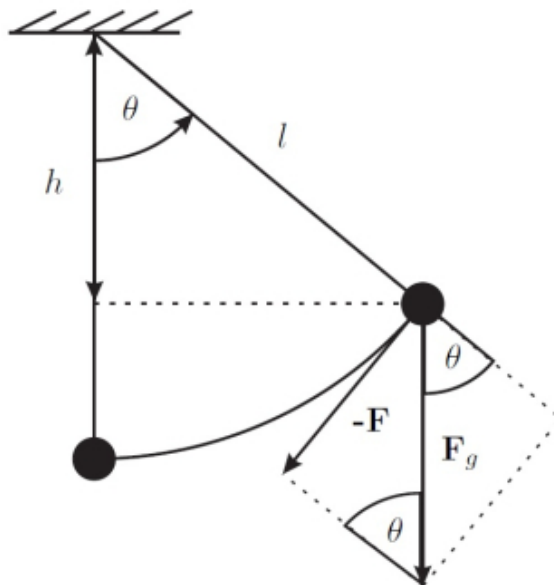
Jaroslav Kaliánko

Obsah

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Úvod | 3 |
| 2 | Odvození rovnice | 4 |
| 2.1 | Odvození pomocí silové rovnováhy | 4 |
| 2.2 | Odvození pomocí zachování mechanické energie | 4 |
| 3 | Diferenciální rovnice matematického kyvadla bez tlumení | 7 |
| 3.1 | Lineární rovnice bez tlumení | 7 |
| 3.2 | Nelineární rovnice bez tlumení | 8 |
| 4 | Diferenciální rovnice matematického kyvadla s tlumením | 9 |
| 4.1 | Nelineární rovnice s tlumením | 10 |
| 4.2 | Lineární rovnice s tlumením | 11 |
| 5 | Autonomní systém | 12 |
| 5.1 | Autonomní rovnice druhého řádu | 12 |
| 5.2 | Singulární body v rovině | 12 |

1 Úvod

Matematické kyvadlo je nejjednodušší model kyvadla. Předpokládáme, že matematické kyvadlo popisuje pohyb hmotného bodu o hmotnosti m zavěšeného na tenkém vlákně délky l zanedbatelné hmotnosti (obrázek 1). Zanedbáváme odpor vzduchu při pohybu kyvadla a tření v závěsu, gravitační pole uvažujeme homogenní. Matematické kyvadlo je mechanický oscilátor, po dodání počáteční energie volně kmitá bez vnějšího působení.



Obrázek 1: Matematické kyvadlo.

2 Odvození rovnice

2.1 Odvození pomocí silové rovnováhy

Odvození diferenciální rovnice popisující pohyb matematického kyvadla je základní úloha mechaniky. Na hmotný bod působí tíhová síla $F_g = mg$, kterou rozložíme na složky, z nichž jedna je kolmá a druhá je rovnoběžná s okamžitým směrem pohybu hmotného bodu. Vychýlíme-li hmotný bod z rovnovážné polohy o výchylku θ , velikost výsledné síly F se rovná

$$F = -mg \sin \theta, \quad (1)$$

kde m je hmotnost hmotného bodu, g je vektor tíhového zrychlení. Podle Newtonova druhého zákona platí vztah

$$F = ma, \quad (2)$$

kde m je hmotnost hmotného bodu, a je vektor zrychlení. Z (1) a (2) dostáváme $a = -g \sin \theta$. Pro zrychlení platí $a(t) = l\theta''(t)$, potom dostáváme

$$l\theta'' = -g \sin \theta,$$

po úpravě dostáváme pohybovou rovnici matematického kyvadla

$$\theta'' + \frac{g}{l} \sin \theta = 0, \quad (3)$$

kde g je tíhové zrychlení, l délka vlákna.

2.2 Odvození pomocí zachování mechanické energie

Diferenciální rovnici pohybu matematického kyvadla odvodíme i ze zákona zachování mechanické energie. Při pohybu hmotného bodu o výšku Δh se změní potenciální energie o hodnotu $mg\Delta h$, přemění se na kinetickou energii. Změna potenciální energie je dána vztahem

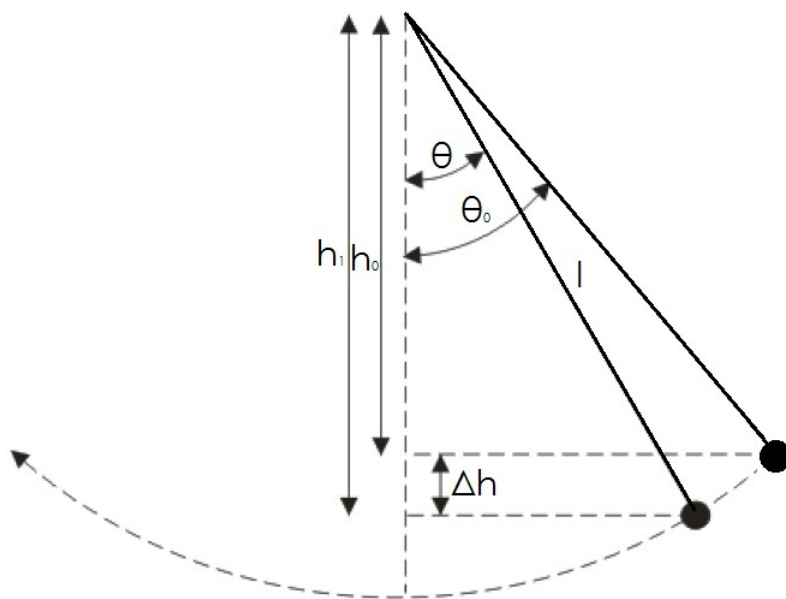
$$\Delta U = mg\Delta h,$$

a změna kinetické energie je dána vztahem

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2.$$

Změna potenciální a změna kinetické energie se rovnají na základě zákona zachování energie

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 &= mg\Delta h, \\ v &= \sqrt{2g\Delta h}.\end{aligned}\tag{4}$$



Obrázek 2: Vychýlení matematického kyvadla.

Pro obloukovou délku s platí

$$\begin{aligned}s &= l\theta, \\ v &= \frac{ds}{dt}, \\ v &= l\frac{d\theta}{dt}.\end{aligned}\tag{5}$$

Použitím vzorce (5) a dosazením do (4) dostaneme

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{l} \sqrt{2g\Delta h}. \quad (6)$$

Když se kyvadlo vychýlí z počáteční výchylky θ_0 (obrázek 2), potom je počáteční svislá vzdálenost h_0 dána vztahem

$$h_0 = l \cos \theta_0,$$

obdobně pro θ platí vztah

$$h_1 = l \cos \theta,$$

pro $\Delta h = h_1 - h_0$, rozdíl dvou výšek, platí

$$\Delta h = l(\cos \theta - \cos \theta_0), \quad (7)$$

Dosazením (7) do (6) dostaneme vztah

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos \theta - \cos \theta_0)}.$$

Zderivováním této rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{d}{dt} \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos \theta - \cos \theta_0)}, \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -\frac{g}{l} \sin \theta, \\ \theta'' + \frac{g}{l} \sin \theta &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Diferenciální rovnice (3) a (8) jsou stejné. Můžeme tedy předpokládat, že je odvození správné.

3 Diferenciální rovnice matematického kyvadla bez tlumení

Diferenciální rovnici (3) nelze řešit elementárními funkcemi. Pro řešení často používáme linearizaci, při které se omezujeme na dostatečně malé výchylky θ .

3.1 Lineární rovnice bez tlumení

Je-li výchylka θ dostatečně malá, tedy do 5° , můžeme uvažovat $\sin \theta \approx \theta$, protože absolutní chyba Taylorova rozvoje prvního řádu funkce sinus kolem nuly je do 5° menší než 10^{-5} . Po dosazení do rovnice (3) řešíme lineární diferenciální rovnici druhého řádu

$$\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0. \quad (9)$$

Obecné řešení této diferenciální rovnice je

$$\theta(t) = C_1 \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t) + C_2 \sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Když přidáme počáteční podmínky

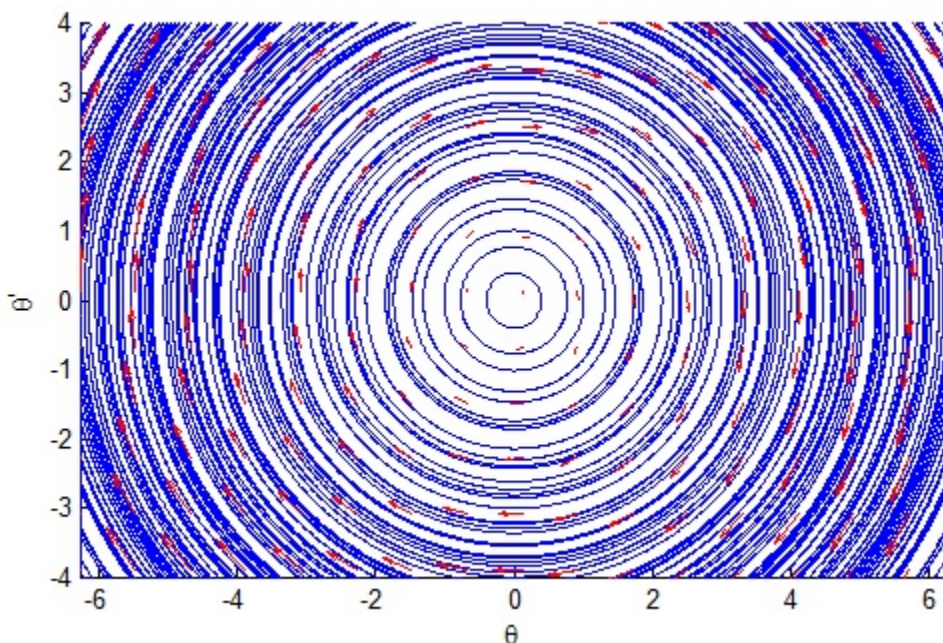
$$\begin{aligned} \theta(0) &= \theta_0, \\ \theta'(0) &= 0, \end{aligned}$$

dostaneme partikulární řešení

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t),$$

kde θ_0 je počáteční úhlová výchylka.

Řešení diferenciální rovnice 2. řádu popisujeme tzv. fázovým portrétem, což je množina všech orbit rovnice společně se šipkami, které vyznačují pohyb bodu $\theta(t, \theta_0)$ po orbitě s rostoucím časem t . Řešení je znázorněno na obrázku 3. Uzavřené orbity "obíhají" kolem singulárního bodu $(0, 0)$, který je stabilním řešením rovnice (9) a jedná se o střed.



Obrázek 3: Fázový portrét lineární diferenciální rovnice pro $g = 9.81$, $l = 9.81$.

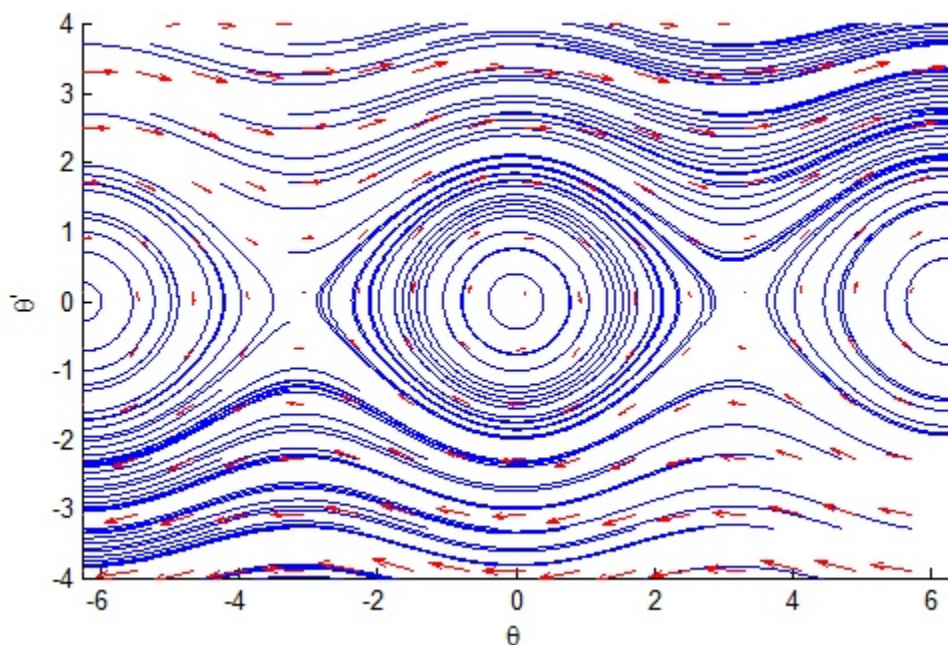
3.2 Nelineární rovnice bez tlumení

Je-li výchylka θ velká (větší než 5°), nemůžeme rovnici (8) linearizovat. Řešení rovnice (8) nemůžeme vyjádřit explicitně pomocí elementárních funkcí, ale můžeme odvodit vzájemný vztah mezi výchylkou a rychlostí matematického kyvadla a určit trajektorie řešení z fázového portréту, viz obrázek 4.

Řešení rovnice (8) reprezentována trajektoriemi fázového portréту:

Rovnovážná řešení jsou na vodorovné ose ($\theta' = 0$):

- Stabilní středy jsou v místech $\theta = 2k\pi$, $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$, kde je minimální potenciální energie.
- Nestabilní sedlové body jsou v místech $\theta = (2k+1)\pi$, $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$, kde je maximální potenciální energie.



Obrázek 4: Fázový portrét nelineární diferenciální rovnice pro $g = 9.81$, $l = 9.81$.

Periodická řešení jsou stabilní:

- Trajektorie tvoří otevřené křivky (v horní a dolní části obrázku 4), hmotný bod se otáčí kolem závěsu.
- Trajektorie tvoří uzavřené křivky kolem středů a hmotný bod se chová obdobně jako při linearizaci.

4 Diferenciální rovnice matematického kyvadla s tlumením

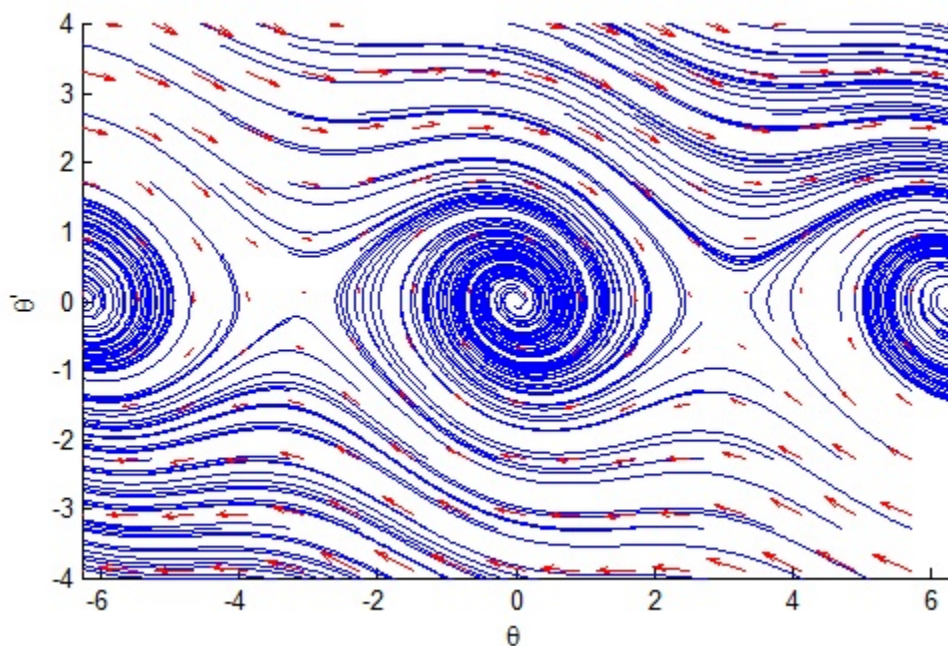
Diferenciální rovnice (3) a (9) popisují pohyb hmotného bodu, který je ovlivněn jen tíhovou silou. V reálnější situaci ale dochází k tlumení vlivem ztráty energie. Tlumení můžeme například připsat oleji v ložisku závěsu. Uvažujeme, že je síla způsobená tlumením úměrná θ' a působí v opačném směru pohybu kyvadla.

4.1 Nelineární rovnice s tlumením

Nelineární rovnici pohybu kyvadla s tlumením určuje vztah

$$\theta'' + \frac{b}{m}\theta' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0, \quad (10)$$

kde b je tlumicí konstanta, m hmotnost hmotného bodu, g tíhové zrychlení, l délka vlákna.



Obrázek 5: Fázový portrét nelineární diferenciální rovnice s tlumením pro $b = 1$, $m = 4$, $g = 9.81$, $l = 9.81$.

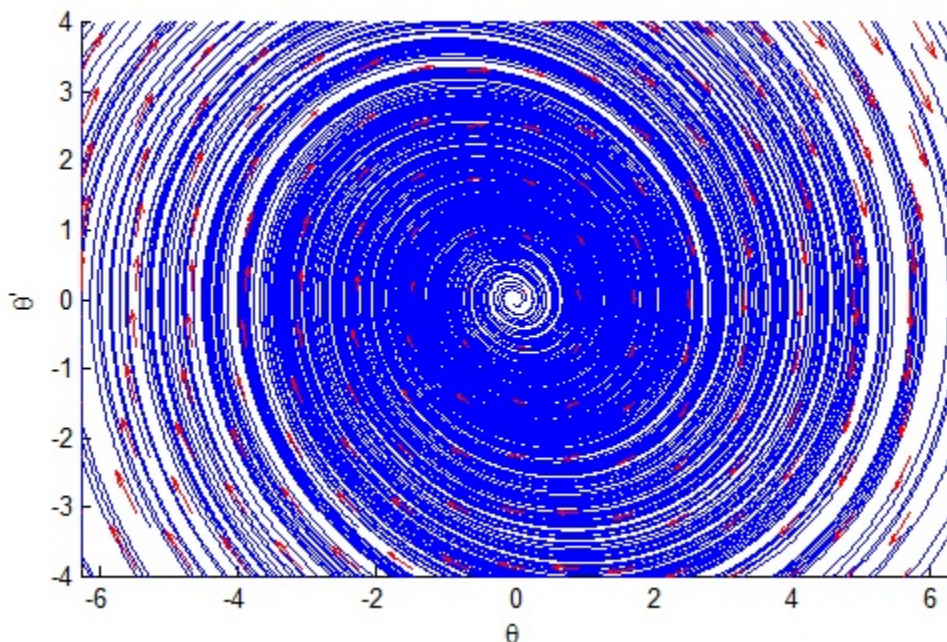
Řešení rovnice (10) lze určit z fázového portréту (obrázek 5). Fázový portrét se od kyvadla bez tlumení liší tím, že se stabilní středy změnily na stabilní ohniska, neobjevují se otevřené a uzavřené trajektorie.

4.2 Lineární rovnice s tlumením

Lineární rovnici pohybu kyvadla s tlumením určuje vztah

$$\theta'' + \frac{b}{m}\theta' + \frac{g}{l}\theta = 0, \quad (11)$$

kde b je tlumicí konstanta, m hmotnost hmotného bodu, g tíhové zrychlení, l délka vlákna a výchylka θ je menší než 5° .



Obrázek 6: Fázový portrét lineární diferenciální rovnice s tlumením pro $b = 1$, $m = 4$, $g = 9.81$, $l = 9.81$.

Řešení rovnice (11) lze vyčíst z fázového portréту (obrázek 6). Singulární bod $(0,0)$ je stabilním řešením rovnice, jedná se o stabilní ohnisko. Od linearizované rovnice bez tlumení se fázový portrét liší jen v kvalifikaci singulárního bodu, místo středu je zde ohnisko.

5 Autonomní systém

5.1 Autonomní rovnice druhého řádu

Diferenciální rovnici druhého řádu

$$x'' = f(x', x)$$

převědeme pomocí transformace $(x(t), x'(t)) \mapsto (x(t), y(t))$ na soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned}x' &= y, \\y' &= f(x, y),\end{aligned}$$

kterou nazveme autonomní.

Fázový prostor řešení $x(t)$ je rovina x, x' , do které vynášíme body se souřadnicemi hodnot řešení a jeho derivací. Fázový portrét řešení rovnice druhého řádu v rovině x, x' jsou orientované křivky.

Úplná řešení autonomní soustavy mají tři druhy trajektorií:

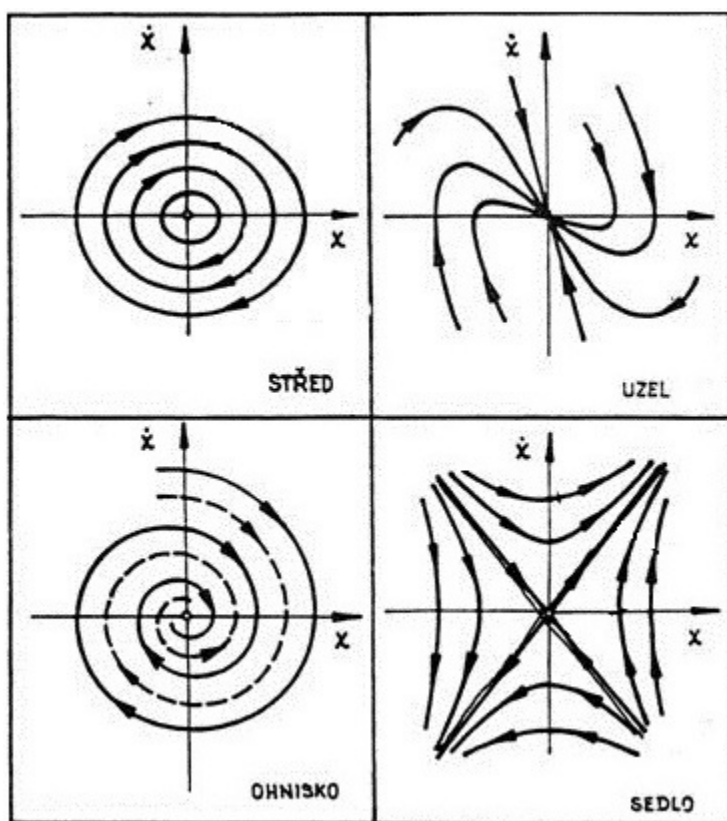
- singulární bod - řešení $x(t)$ je konstantní,
- cyklus, uzavřená křivka - řešení $x(t)$ je periodické,
- otevřená neprotínající se křivka - trajektorie řešení představuje prosté zobrazení otevřeného intervalu do fázového prostoru.

5.2 Singulární body v rovině

Izolovaný singulární bod (x_0, y_0) nazveme:

- **střed** - každým bodem okolí (x_0, y_0) prochází trajektorie uzavřené křivky (cyklus),
- **uzel** - každým bodem okolí (x_0, y_0) prochází trajektorie otevřené křivky, jejíž konec (limita) je singulární bod (x_0, y_0) a směrnice tečny trajektorie (x', y') má konečnou limitu,

- **ohnisko** - každým bodem okolí (x_0, y_0) prochází trajektorie otevřené křivky, jejíž jeden konec (limita) je singulární bod (x_0, y_0) a směrnice tečny trajektorie (x', y') má nevlastní limitu,
- **sedlo** - v okolí bodu (x_0, y_0) existují trajektorie, které se s rostoucím t blíží k (x_0, y_0) a zároveň se s rostoucím t vzdalují od (x_0, y_0) .



Obrázek 7: Typy singulárních bodů.

Fázové portréty vykreslujeme v programu **MATLAB**. Nezbytnou funkcí je funkce **ode45**, což je numerická funkce pro řešení diferenciálních rovnic, pro vykreslování vektorů zase používáme funkci **quiver**.

Reference

- [1] Baker, G.L., Blackburn, J.A.: *The Pendulum: A Case Study in Physics*. Oxford University Press, 2005, 288 s.
- [2] MathWorks.: *Dokumentace MATLAB*,
<http://www.mathworks.com/help/matlab/ordinary-differential-equations.html>
- [3] Kufner, A.: *Obyčejné diferenciální rovnice*. Plzeň: Západočeská univerzita, 1993, 159 s.
- [4] Kalas, J., Ráb, M.: *Obyčejné diferenciální rovnice*. Masarykova univerzita, Brno, 1995.
- [5] <http://www.myphysicslab.com>